第 3 章　复数

3.1　复数的概念

· 题型诀 ·

1-1. B　【解析】因为 $i+7i^2=-7+i$，所以 $i+7i^2$ 的实部为 -7，虚部为 1，所以实部与虚部之和为 -6.

1-2. A　【解析】$-\sqrt{5}+2i$ 的虚部为 2，$\sqrt{5}i+2i^2=-2+\sqrt{5}i$ 的实部为 -2，所以所求复数的实部为 2，虚部为 -2，即为 $2-2i$.

1-3. 2　【解析】因为复数不能比较大小，所以 $m-2+(m^2-4)i$ 为实数，

可得 $\begin{cases} m^2-4=0, \\ m-2\geqslant 0, \end{cases}$ 解得 $m=2$.

2-1. D　【解析】因为 $2+ai=b-i$，所以 $a=-1, b=2$，故复数 $z=a+bi$ 的虚部为 2，故选 D.

2-2. C　【解析】若 $z_1=z_2$，则 $\begin{cases} m^2+m+1=3, \\ m-4=-3, \end{cases}$ 解得 $m=1$，

所以"$m=1$"是"$z_1=z_2$"的充要条件.

故选 C.

2-3. 5　【解析】因为 $m\in\mathbf{R}, z_1=z_2$，所以 $(2m+7)+(m^2-2)i=(m^2-8)+(4m+3)i$.

由复数相等的充要条件得 $\begin{cases} 2m+7=m^2-8, \\ m^2-2=4m+3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} (m-5)(m+3)=0, \\ (m-5)(m+1)=0, \end{cases}$ 解得 $m=5$.

3-1. A　【解析】当 $z=a^2-a+(a+1)i$ 为纯虚数时，$\begin{cases} a^2-a=0, \\ a+1\neq 0, \end{cases}$ 解得 $a=0$ 或 $a=1$.

所以"$a=1$"是"复数 $z=a^2-a+(a+1)i$ $(a\in\mathbf{R}$，i 是虚数单位$)$为纯虚数"的充分不必要条件. 故选 A.

3-2.【解】(1) 因为复数 z 是实数，所以 $m^2-3m-4=0$，解得 $m=-1$ 或 $m=4$.

(2) 因为 z 是纯虚数，所以 $m^2-2m-3=0$ 且 $m^2-3m-4\neq 0$，解得 $m=3$，故 $m=3$.

3.2　复数的四则运算

· 易错记 ·

1-1.【解】设 x_0 是方程的实数根，代入方

程并整理得 $x_0^2-6x_0+9+(a-x_0)\mathrm{i}=0$,

所以 $\begin{cases}x_0^2-6x_0+9=0,\\a-x_0=0,\end{cases}$ 解得 $a=x_0=3$.

· 题型诀 ·

1-1. D 【解析】$z=(3-4\mathrm{i})-(1-2\mathrm{i})=2-2\mathrm{i}$,故复数 z 的虚部为 -2. 故选 D.

1-2. 【解】(1) $(-2+3\mathrm{i})+(5-\mathrm{i})=(-2+5)+(3-1)\mathrm{i}=3+2\mathrm{i}$.

(2) $(a+b\mathrm{i})-(2a-3b\mathrm{i})-3\mathrm{i}=(a-2a)+(b+3b-3)\mathrm{i}=-a+(4b-3)\mathrm{i}$.

2-1. A 【解析】$z=(7-a\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=7+7\mathrm{i}-a\mathrm{i}-a\mathrm{i}^2=7+a+(7-a)\mathrm{i}$,

又∵ 复数 z 为纯虚数,

$\therefore \begin{cases}7+a=0,\\7-a\neq0,\end{cases}$ 解得 $a=-7$. 故选 A.

2-2. A 【解析】因为 $(1-\mathrm{i})z=2+\mathrm{i}$,所以 $z=\frac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(2+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$. 故选 A.

2-3. 【解】(1) $(1+3\mathrm{i})(4-\mathrm{i})=7+11\mathrm{i}$.

(2) $(2+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})=(3-\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})=13+9\mathrm{i}$.

(3) $\frac{2-3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(2-3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{-1-5\mathrm{i}}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\mathrm{i}$.

3-1. B 【解析】由虚数单位 i 的性质可知 $\mathrm{i}^8=1$,

故由 $a+b\mathrm{i}=\mathrm{i}^8(2-\mathrm{i})$ 可得 $a+b\mathrm{i}=2-\mathrm{i}$,

故 $a=2,b=-1$,$\therefore a+b=1$. 故选 B.

3-2. (1) -1　(2) -1

【解析】(1) $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^6=\mathrm{i}^6=-1$.

(2) $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)\cdot\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^2\cdot\cdots\cdot\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2\,020}=\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}^2\cdot\cdots\cdot\mathrm{i}^{2\,020}=[\mathrm{i}\cdot(-1)\cdot(-\mathrm{i})\cdot1]^{505}=(-1)^{505}=-1$.

4-1. C 【解析】根据方程两根之和等于 2,知另一个根是 $1+2\mathrm{i}$,所以虚部是 2,故选 C.

5-1. C 【解析】∵ 复数 $3-2\mathrm{i}$ 是关于 x 的方程 $2x^2-mx+n=0$ 的一个根,

∴ 复数 $3+2\mathrm{i}$ 也是关于 x 的方程 $2x^2-mx+n=0$ 的一个根,

$\therefore \frac{m}{2}=3-2\mathrm{i}+3+2\mathrm{i}=6$,

$\frac{n}{2}=(3-2\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})=13$,

$\therefore m=12, n=26$. 故选 C.

5-2.【解】(1) 由已知得 $m(2\mathrm{i}-1)+n-1=0$, $\therefore (n-m-1)+2m\mathrm{i}=0$,

$\therefore \begin{cases}n-m-1=0,\\2m=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n=1,\\m=0,\end{cases}$ $\therefore m+n=1$.

(2) 方法一：由已知得 $(2\mathrm{i}-1)^2+m(2\mathrm{i}-1)+n-1=0$, $\therefore (n-m-4)+(2m-4)\mathrm{i}=0$,

$\therefore \begin{cases}n-m-4=0,\\2m-4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n=6,\\m=2,\end{cases}$ $\therefore m+n=8$.

方法二：$\because 2\mathrm{i}-1$ 是实系数方程 $x^2+mx+n-1=0$ 的根，$\therefore -1-2\mathrm{i}$ 也是此方程的根，

$\therefore \begin{cases}(-1+2\mathrm{i})+(-1-2\mathrm{i})=-m,\\(-1+2\mathrm{i})(-1-2\mathrm{i})=n-1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=2,\\n=6,\end{cases}$ $\therefore m+n=8$.

6-1. D【解析】由题知，方程 $x^2+\mathrm{i}x+1=0$ 的判别式 $\Delta=\mathrm{i}^2-4=-5<0$,

则 z_1 与 z_2 互为共轭复数，$z=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\mathrm{i}$,

令 $z_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\mathrm{i}$, $z_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\mathrm{i}$.

对于 A，因为 $z_1^2=\frac{\sqrt{5}-3}{2}$, $z_2^2=-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$,

即 $z_1^2\neq z_2^2$，故 A 错误；

对于 B，$z_1+z_2=-\mathrm{i}\neq z_1z_2=1$，故 B 错误；

对于 C，$|1+z_1|=\left|1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\mathrm{i}\right|=\sqrt{1+\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, $|1+z_2|=\left|1+\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\mathrm{i}\right|=\sqrt{1+\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$,

因此，$|1+z_1|\neq|1+z_2|$，故 C 错误；

对于 D，$\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}=\frac{1}{-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$，故 D 正确. 故选 D.

6-2.【解】设方程的实数根为 $x=m$，则 $(2+\mathrm{i})\cdot m^2-am+1=4\mathrm{i}$，整理得 $(2m^2-am+1)+m^2\mathrm{i}=4\mathrm{i}$.

根据复数相等的充要条件，

得 $\begin{cases}m^2=4,\\2m^2-am+1=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=2,\\ a=\dfrac{9}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}m=-2,\\ a=-\dfrac{9}{2}.\end{cases}$

$\therefore$ 当实数 $a=\dfrac{9}{2}$时，实数根为 2；当实数 $a=-\dfrac{9}{2}$时，实数根为-2.

3.3　复数的几何表示

· 易错记 ·

1-1.【解】(1)由向量平移可知 $\overrightarrow{O_1A_1}=\overrightarrow{OA}=(-1,5)$，$\therefore$ $\overrightarrow{O_1A_1}$ 对应的复数为$-1+5i$.

(2)由题意可得 $A_1(1,6)$，故点 A_1 对应的复数为 $1+6i$.

· 题型诀 ·

1-1. B　【解析】因为 $z=i-2$ 在复平面内对应的点的坐标为$(-2,1)$，所以 z 在复平面内对应的点位于第二象限. 故选 B.

1-2. B　【解析】$z_1=3-2i$ 对应的点的坐标为$(3,-2)$，因为 z_1,z_2 在复平面内对应的点关于虚轴对称，所以 z_2 对应的点的坐标为$(-3,-2)$，故 $z_2=-3-2i$. 故选 B.

1-3.【解】(1)依题意得当 $m^2-2m-3=0$ 且 $m-3\neq0$，即 $m=-1$ 时，

复数 z 是纯虚数，虚部为-4.

(2)依题意，得$\begin{cases}m^2-2m-3<0,\\ m-3>0\end{cases}$或$\begin{cases}m^2-2m-3>0,\\ m-3<0,\end{cases}$解得 $m<-1$. 所以当 $m\in(-\infty,-1)$时，点 Z 位于第二、四象限.

(3)依题意得当 $m^2-2m-3=m-3$，

即 $m=0$ 或 $m=3$ 时，点 Z 位于直线 $y=x$ 上.

2-1. D　【解析】由复数的几何意义，知 $\overrightarrow{OA}=(4,2)$，$\overrightarrow{OB}=(4,-4)$，$\overrightarrow{OC}=(2,6)$，设 $D(x,y)$，则 $\overrightarrow{OD}=(x,y)$.

则 $\overrightarrow{AB}=(0,-6)$，$\overrightarrow{DC}=(2-x,6-y)$.

因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

由$\begin{cases}2-x=0,\\ 6-y=-6,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\ y=12,\end{cases}$

所以点 $D(2,12)$对应的复数为 $2+12i$.

故选 D.

2-2.【解】(1) 设向量 $\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}(x_1,y_1\in\mathbf{R})$，则点 B 的坐标为 (x_1,y_1). 由题意得 $A(2,1)$，点 A 与点 B 关于实轴对称，则根据对称性可知，$x_1=2,y_1=-1$. 故 $z_1=2-\mathrm{i}$.

(2) 设点 C 对应的复数为 $z_2=x_2+y_2\mathrm{i}(x_2,y_2\in\mathbf{R})$，则点 C 的坐标为 (x_2,y_2)，由 (1) 得 $B(2,-1)$，点 B 与点 C 关于虚轴对称，则根据对称性可知，$x_2=-2,y_2=-1$. 故 $z_2=-2-\mathrm{i}$.

3-1. CD　【解析】对于 A，$1-\mathrm{i}$ 的虚部是-1，故 A 不正确；

对于 B，$|1-\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，故 B 不正确；

对于 C，$(1-\mathrm{i})^2=1-2\mathrm{i}+(-\mathrm{i})^2=-2\mathrm{i}$，为纯虚数，故 C 正确；

对于 D，$1-\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点为 $(1,-1)$，位于第四象限，故 D 正确.

故选 CD.

3-2. AB　【解析】由题意，因为 $z=1+\mathrm{i}$，所以 $|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，其对应的点为 $(1,1)$，在第一象限，且其虚部为 1，其共轭复数为 $1-\mathrm{i}$，

所以选项 A，B 正确，选项 C，D 错误，故选 AB.

4-1. C　【解析】对于 A 选项，若 $|z_1+z_2|=0$，则 $z_1+z_2=0$，可得 $z_1=-z_2$，A 错误；

对于 B 选项，设 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$，$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}(a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbf{R})$，

则 $z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i}$，由 $z_1+z_2\in\mathbf{R}$，可得 $b_1+b_2=0$，则 $b_1=-b_2$，但 a_1,a_2 不一定相等，故 z_1,z_2 不一定互为共轭复数，B 错误；

对于 C 选项，设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，所以 $z\cdot\overline{z}=a^2+b^2=|z|^2$，

若 $|z_1|=|z_2|$，$z_1\cdot\overline{z_1}=|z_1|^2=|z_2|^2=z_2\cdot\overline{z_2}$，C 正确；

对于 D 选项，取 $z_1=1+\mathrm{i}$，$z_2=1-\mathrm{i}$，则 $|z_1|=|z_2|=\sqrt{2}$，

但 $z_1^2=(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$，$z_2^2=(1-\mathrm{i})^2=-2\mathrm{i}$，则 $z_1^2\neq z_2^2$，D 错误.

故选 C.

4-2. $\sqrt{5}$ 【解析】$z=\frac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(3-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{3-3\mathrm{i}-\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{2}=\frac{2-4\mathrm{i}}{2}=1-2\mathrm{i}$,

则 $\bar{z}=1+2\mathrm{i}$, $|\bar{z}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

4-3.【解】(1)由复数 $z=(1+\mathrm{i})^2+1-3\mathrm{i}=2\mathrm{i}+1-3\mathrm{i}=1-\mathrm{i}$,所以 $|z|=|1-\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

(2)由(1)知 $z=1-\mathrm{i}$,可得 $\bar{z}=1+\mathrm{i}$.

由 $z^2+b\bar{z}+a=z$,可得 $(1-\mathrm{i})^2+b(1+\mathrm{i})+a=1-\mathrm{i}$,

即 $a+b+(b-2)\mathrm{i}=1-\mathrm{i}$,

所以 $\begin{cases}a+b=1,\\ b-2=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0,\\ b=1.\end{cases}$

5-1. AD 【解析】由 $\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$,

$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$,

得 $z=\sqrt{2}\left[\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{i}\right]$.

当 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时,$\alpha+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,

故 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)>0$, $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)>0$,所以 z 对应的点在第一象限,故 A 正确;

当 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 时,$\alpha+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$,故 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)>0$, $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)<0$,所以 z 对应的点在第四象限,故 B 错误;

复数 z 的模为 $\sqrt{2}$,是定值,故 C 错误,D 正确.

5-2. $[0,1)$ 【解析】$\because y=|\cos x-\sin x|=\left|\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\in[0,\sqrt{2}]$,

$\therefore M=[0,\sqrt{2}]$.

$\because |\sqrt{2}+x\mathrm{i}|<\sqrt{3}$, $\therefore \sqrt{x^2+2}<\sqrt{3}$,

$\therefore -1<x<1$, $\therefore N=(-1,1)$.

$\therefore M\cap N=[0,1)$.

6-1. B 【解析】因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$,所以向量 $\overrightarrow{AB}$ 对应的复数为 $(-3+2\mathrm{i})-(2-3\mathrm{i})=-5+5\mathrm{i}$,故选 B.

6-2. C 【解析】由题图可知 $\overrightarrow{OA}=(-2,$

$-1)$，$\overrightarrow{OB}=(0,1)$，

所以 $z_1=-2-i$，$z_2=i$，

所以 $z_1-z_2=-2-i-i=-2-2i$，

所以 z_1-z_2 在复平面内对应的点为 $(-2,-2)$，位于第三象限. 故选 C.

6-3.【解】由题意可得 $O(0,0)$，$A(3,2)$，$C(-2,4)$.

(1) $\overrightarrow{AO}=(-3,-2)$，所以 $\overrightarrow{AO}$ 表示的复数为 $-3-2i$.

(2) $\overrightarrow{CA}=(5,-2)$，所以 $\overrightarrow{CA}$ 表示的复数为 $5-2i$.

(3) 设 $B(x,y)$，$x,y\in\mathbf{R}$，

则 $\overrightarrow{BC}=(-2-x,4-y)$.

因为四边形 $OABC$ 为平行四边形，

所以 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}$，

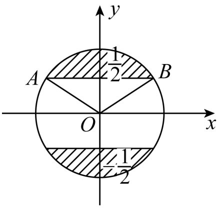
所以 $\begin{cases}-2-x=-3,\\4-y=-2,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x=1,\\y=6,\end{cases}$

即 $B(1,6)$，

所以点 B 对应的复数为 $1+6i$.

7-1.【解】$\because$ $|z|\leqslant 1$，且 z 的虚部的绝对值不小于 $\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$ 复数 z 在复平面内对应点组成的图形如图中阴影部分所示(包括边界).



$\because$ $\angle AOB=\dfrac{2\pi}{3}$，$\therefore$ $S_{\text{扇形}AOB}=\dfrac{\pi}{3}$.

$\because$ $S_{\triangle AOB}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，$\therefore$ 上图中 x 轴上方阴影部分的面积为 $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore$ 整个阴影部分的面积为 $\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

即复数 z 在复平面内的对应点组成的平面图形的面积是 $\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

8-1. C　【解析】设 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，

因为 $|z_1|=2$，所以 $a^2+b^2=4$.

因为复数 z_1,z_2 在复平面内对应的点分别为 Z_1,Z_2，$z_2=3i$，所以 $Z_1(a,b)$，$Z_2(0,3)$，

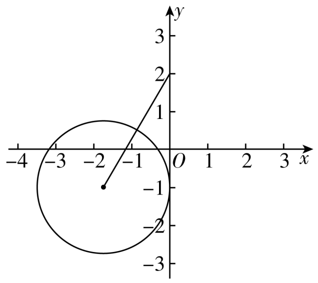
所以 $|Z_1Z_2|=\sqrt{(a-0)^2+(b-3)^2}=\sqrt{13-6b}$,故当 $b=-2$ 时,$|Z_1Z_2|$ 取得最大值,最大值为 $\sqrt{13+12}=5$,故选 C.

8-2. AD 【解析】对 A,$|z_1|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$,故 A 正确;

对 B,$z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 对应复平面内点 $Z_1(\sqrt{3},1)$,$z_2=x+y\mathrm{i}$ 对应复平面内点 $Z_2(x,y)$,因为 $\overrightarrow{OZ_1}/\!/\overrightarrow{OZ_2}$,所以 $\sqrt{3}y-x=0$,故 B 错误;

对 C,若 $\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$,则 $\sqrt{3}x+y=0$,即 $y=-\sqrt{3}x$,故 $z_1z_2=(\sqrt{3}+\mathrm{i})(x-\sqrt{3}x\mathrm{i})=2\sqrt{3}x-2x\mathrm{i}\neq0$,故 C 错误;

对 D,若 $|z_2+z_1|\leqslant\sqrt{3}$,即 $|(x+\sqrt{3})+(y+1)\mathrm{i}|\leqslant\sqrt{3}$,得 z_2 在复平面内对应的点 (x,y) 是在以 $(-\sqrt{3},-1)$ 为圆心,$\sqrt{3}$ 为半径的圆上及圆内,又 $|z_2-2\mathrm{i}|$ 的几何意义为 (x,y) 到 $(0,2)$ 的距离,故 $|z_2-2\mathrm{i}|$ 的最大值为 $\sqrt{(-\sqrt{3}-0)^2+(-1-2)^2}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$,故 D 正确. 故选 AD.



8-3. 直角三角形 【解析】设复数 z_1+z_2 对应的点为 Z,则四边形 OZ_1ZZ_2 为平行四边形.

又$\because$ $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$,即 $|OZ|=|Z_1Z_2|$,

$\therefore$ 四边形 OZ_1ZZ_2 为矩形,

$\therefore$ $OZ_1\perp OZ_2$,$\therefore$ $\triangle OZ_1Z_2$ 是直角三角形.

8-4. 【解】方法一:设 $z_1=a+b\mathrm{i}$,$z_2=c+d\mathrm{i}(a,b,c,d\in\mathbf{R})$,

由题意可得 $\begin{cases}a^2+b^2=1,\\c^2+d^2=1,\\(a-c)^2+(b-d)^2=1,\end{cases}$

$\therefore$ $2ac+2bd=1$,

$\therefore$ $|z_1+z_2|^2=(a+c)^2+(b+d)^2=a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2=3$,$\therefore$ $|z_1+z_2|=\sqrt{3}$.

方法二:$\because$ $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)=4$,

$\therefore |z_1+z_2|^2=3$，$\therefore |z_1+z_2|=\sqrt{3}$.

方法三：在复平面内分别作出复数 z_1,z_2 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$，$\because \overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$ 不共线，以 $\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$ 为邻边作平行四边形 OZ_1ZZ_2. $\because |z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|=1$，

$\therefore$ 平行四边形 OZ_1ZZ_2 是有一个内角为 $60°$ 的菱形，

$\therefore |z_1+z_2|=OZ$

$=\sqrt{OZ_1{}^2+ZZ_1{}^2-2OZ_1\cdot ZZ_1\cdot\cos 120°}$

$=\sqrt{3}$.

*3.4 复数的三角表示

·题型诀·

1-1. D 【解析】$\sin 4+\mathrm{i}\cos 4=\cos\left(\frac{5\pi}{2}-4\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{2}-4\right)$.

1-2. 【解】由 $(z+1)(\bar{z}+1)=|z|^2$ 得 $z\cdot\bar{z}+z+\bar{z}+1=|z|^2$. $\because z\cdot\bar{z}=|z|^2$，$\therefore z+\bar{z}+1=0$，

$\therefore z+\bar{z}=-1$.

由 $\frac{z-1}{z+1}$ 是纯虚数得 $\overline{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}+\frac{z-1}{z+1}=0$，

$\therefore \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}+\frac{z-1}{z+1}=0$，

$\therefore \frac{\bar{z}z-z+\bar{z}-1+z\bar{z}-\bar{z}+z-1}{(\bar{z}+1)(z+1)}=0$，

$\therefore 2z\cdot\bar{z}=2$，$\therefore z\cdot\bar{z}=1$.

于是 $z,\bar{z}$ 是方程 $x^2+x+1=0$ 的两根，

解得 $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$\therefore z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

设辐角为 θ，当 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 时，则 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$，复数 z 在复平面内对应的点 $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在第二象限，$\therefore z$ 的辐角主值为 $\frac{2\pi}{3}$；

当 $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 时，则 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$，复数 z 在复平面内对应的点 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在第三象限，$\therefore z$ 的辐角主值为 $\frac{4\pi}{3}$.

2-1. A 【解析】$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\cos\frac{5}{3}\pi+$

$\mathrm{isin}\,\frac{5}{3}\pi$

$=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{isin}\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{isin}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

2-2.【解】(1)$r=1$,对应的点在 x 轴的正半轴上,所以 $\arg(1)=0$,所以 $1=\cos 0+\mathrm{isin}\ 0$.

(2)$r=2$,对应的点在 y 轴的负半轴上,

所以 $\arg(-2\mathrm{i})=\frac{3\pi}{2}$,

所以$-2\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{isin}\frac{3\pi}{2}\right)$.

(3)$-2\left(\sin\frac{3\pi}{4}+\mathrm{icos}\frac{3\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}$,

$r=2$,对应的点在第二象限,

且 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以取 $\theta=\frac{3\pi}{4}$,

所以$-2\left(\sin\frac{3\pi}{4}+\mathrm{icos}\frac{3\pi}{4}\right)=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{isin}\frac{3\pi}{4}\right)$.

3-1. $z=\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}$　【解析】$z=5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}$.

3-2.【解】(1)$z_1=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{isin}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=2\times0+2\times(-1)\mathrm{i}=-2\mathrm{i}$.

(2)$z_2=5(\cos 135°+\mathrm{isin}\ 135°)=5\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+5\times\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}=-\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

4-1. D　【解析】$4(\cos 60°+\mathrm{isin}\ 60°)\times 3(\cos 150°+\mathrm{isin}\ 150°)$

$=12[\cos(60°+150°)+\mathrm{isin}(60°+150°)]$

$=12(\cos 210°+\mathrm{isin}\ 210°)=12\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=-6\sqrt{3}-6\mathrm{i}$,故选 D.

4-2.【解】$z_2=2(\cos 150°-\mathrm{isin}\ 150°)=2[\cos(-150°)+\mathrm{isin}(-150°)]$,

$\therefore z_1z_2=8\times2[\cos(240°-150°)+\mathrm{isin}(240°-150°)]=16(\cos 90°+\mathrm{isin}\ 90°)=16\mathrm{i}$.

5-1. $\frac{\pi}{6}$　【解析】由题知,$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\right.$

$\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\Big)$，$z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$，所以

$\frac{z_1}{z_2}$的辐角主值为$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$.

5-2.【解】(1) $4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)\div$

$\left[2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

$=2\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)=2\mathrm{i}$.

(2) $\because$ $1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$，

$-\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)$，

$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$，

$-1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)$，

$-1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$，

$\therefore \frac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(-\sqrt{3}+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(-1-\mathrm{i})^2(-1+\mathrm{i})}$

$=\left\{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\left[2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right]\cdot\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}\div$

$\left\{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]^2\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]\right\}$

$=\left\{2\times2\times\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}\div\left\{(\sqrt{2})^2\times\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)\right]\right\}=\frac{2\left(\cos\frac{17\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{12}\right)}{\cos\frac{13\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{4}}$

$=2\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}-\frac{13\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{17\pi}{12}-\frac{13\pi}{4}\right)\right]$

$=2\left[\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)\right]$

$=\sqrt{3}+\mathrm{i}$.

6-1. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 【解析】因为复数 $z=\cos\frac{\pi}{15}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{15}$是方程 $x^5-\alpha=0$ 的一个

根，所以 $\alpha=z^5=\left(\cos\dfrac{\pi}{15}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{15}\right)^5=$

$\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$

6-2. 16　$\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$（答案不唯一）

【解析】$\because\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$，

$\therefore z=(\sqrt{3}+\mathrm{i})^4=2^4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$，

则 $|\bar{z}|=|z|=2^4=16.$

由题意知 $\omega^6=1$，设 $\omega=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，则 $\omega^6=\cos 6\theta+\mathrm{i}\sin 6\theta=1$，所以 $\begin{cases}\sin 6\theta=0,\\ \cos 6\theta=1.\end{cases}$ 又 $\omega\notin\mathbf{R}$，所以 $\sin\theta\neq0$，故可取 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，

则 $\omega=\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$（答案不唯一）.

7-1. B　【解析】由题可知 $z_1=1=\cos 0+\mathrm{i}\sin 0$，$z_2=\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}$，所以 $z_2z_1=\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}$，所以 $\arg(z_2z_1)=\dfrac{\pi}{6}.$

7-2. 【解】依题意知 $(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})\cdot\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)=\dfrac{z_2}{\cos\dfrac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}}.$

$\therefore z_2=(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)\cdot\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$=2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)\cdot\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$=2\left[\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]$

$=2\left(\cos\dfrac{11}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{11}{4}\pi\right)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}.$